

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
(Пермский филиал)

ОДОБРЕНО

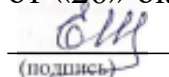
на заседании кафедры
ОГСЭ протокол №11
от «27» июня 2023 г.
Зав. кафедрой, к.п.н.



/М.Л. Катаева

УТВЕРЖДЕНО

на заседании НМС
протокол №1
от «26» октября 2023г


(подпись)

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для проведения практической работы
по дисциплине ОУД. 10 Математика
на тему: «Иррациональные неравенства, решение иррациональных
неравенств»

для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и
программирование

г. Пермь, 2023 г.

Разработчики:

Виноградова Н.А., преподаватель высшей квалификационной категории
Пермского филиала Финуниверситета

Рецензент: Тотмянина Л.В., преподаватель высшей квалификационной
категории Пермского филиала Финуниверситета

Пояснительная записка

Методические рекомендации по дисциплине «Математика» по теме «Иррациональные неравенства и решение иррациональных неравенств» предназначены для студентов, обучающихся на базе основного общего образования, по программам подготовки специалистов среднего звена, для специальности 10.02.04 Обеспечение информационной безопасности телекоммуникационных систем.

Метапредметные и предметные результаты освоения учебной дисциплины «Математика» по заданной теме:

М1- умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях

М-4- готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

П-4 владение стандартными приемами решения степенных, уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств.

Учебная цель: систематизировать знания по пройденной теме, отработать умение решать иррациональные уравнения и неравенства, закрепить умения использовать различные способы решения иррациональных уравнений и неравенств.

Методическая цель: способствовать алгоритмической деятельности учащихся при обучении уравнениям и неравенствам, предоставить возможность самим решать, как выстроить систему освоения темы.

Воспитательная цель: способствовать формированию ответственного отношения к учению, готовности и мобилизации усилий на выполнение заданий; воспитывать культуру учебного труда, навыков самоконтроля и экономного расходования времени; развивать коммуникативные навыки.

В методической работе автором кратко излагается теоретический материал, необходимый для выполнения заданий, даются рекомендации к их выполнению.

Иррациональные выражения

Иррациональными выражениями называют выражения, содержащие операцию извлечения корня. Другими словами, иррациональные выражения – это выражения с радикалами (выражения, содержащие в своей записи знаки корня).

При выполнении тождественных преобразований иррациональных выражений используют следующие свойства:

Свойства арифметических корней n-степени	Примеры
1) Если $a \geq 0, b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{125 \cdot 8} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{8} = 5 \cdot 2 = 10;$ $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2 \cdot 16} = \sqrt[5]{32} = 2;$
2) Если $a \geq 0, b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3};$ $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3;$
3) Если $a \geq 0, n \in N, k \in N$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{a}} - 3\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a} - 3\sqrt[6]{a} = -2\sqrt[6]{a}$
4) Если $a \geq 0, n \in N, k \in N$, то $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$	$\sqrt[5]{32^3} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8;$
5) Если $a > 0, k \leq 0$, то $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$	$\sqrt[5]{32^{-3}} = (\sqrt[5]{32})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};$
6) Если $a \geq 0, n \in N, k \in N$, то $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$	$2\sqrt[15]{a^5} - 9 \cdot \sqrt[9]{a^3} + 3\sqrt[3]{a} = 2\sqrt[3]{a} - 9\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} = -4\sqrt[3]{a};$
7) Если $0 \leq a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$	Что больше: $3\sqrt[4]{2}$ или $2\sqrt[4]{3}$? $3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{81 \cdot 2} = \sqrt[4]{162};$ $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{48};$ Следовательно: $162 > 48;$ $\sqrt[4]{162} > \sqrt[4]{48};$ $3\sqrt[4]{2} > 2\sqrt[4]{3}.$

Задание 1. Вычислить значение выражения:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}$$

Решение.

Используем известные нам свойства корней. Произведение корней можем записать под общий корень:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}, x, y > 0$$

$$\sqrt{\sqrt{10}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+2} = \sqrt{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}$$

Отношение корней также записываем под общий корень:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}, x, y > 0$$

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}{24}}$$

Удобно раскрыть скобки в числителе, используя формулу разности квадратов:

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

$$(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2) = (\sqrt{10})^2 - 2^2$$

По определению корня:

$$(\sqrt{x})^2 = x, x \geq 0$$

Получаем:

$$(\sqrt{10})^2 = 10$$

Значит:

$$(\sqrt{10})^2 - 2^2 = 10 - 4 = 6$$

Получаем:

$$\sqrt{\frac{6}{24}} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

Снова воспользуемся свойством корней:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Ответ: **0,5**.

Задание 2. Вычислить значение выражения:

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

Решение.

Здесь у нас нет произведения или отношения корней, поэтому воспользоваться теми же свойствами, что и в предыдущем примере, нам не удастся. Вспомним **важную идею**: упростить выражение с квадратным корнем можно, выделив под корнем квадрат некоторого выражения, тогда можно использовать определения корня. Попробуем это сделать.

Выражение $7 - 4\sqrt{3}$ должно быть квадратом некоторого выражения. Сравним с формулой квадрата разности:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Слагаемое с корнем $4\sqrt{3}$ должно быть удвоенным произведением $2ab$
 7 $a^2 + b^2$

, а число — это оставшиеся слагаемые a и b . Теперь наша задача —

подобрать такие a и b , что:

$$\begin{cases} 2ab = 4\sqrt{3} \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

По сути, нужно найти хотя бы одно решение этой системы уравнений. Удобно это делать следующим образом:

$$2ab = 4\sqrt{3}$$

$$ab = 2\sqrt{3}$$

$$(ab)^2 = (2\sqrt{3})^2$$

$$a^2b^2 = 12$$

$$a^2 \text{ и } b^2$$

Теперь подберем такие числа , что:

$$\begin{cases} a^2b^2 = 12 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

Это:

$$a^2 = 3$$

$$b^2 = 4$$

Тогда:

$$a = \sqrt{3}$$

$$b = 2$$

В итоге получаем:

$$7 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 2^2 = (\sqrt{3} - 2)^2$$

Аналогично, используя формулу квадрата суммы, получим:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$7 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 2^2 = (\sqrt{3} + 2)^2$$

Тогда исходное выражение примет вид:

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2}$$

По свойству корня получаем:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| + |\sqrt{3} + 2|$$

$$\sqrt{3} - 2$$

$$\sqrt{3} < 2$$

– отрицательная величина, поскольку $\sqrt{3} < 2$, поэтому:

$$|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} + 2$$

– положительная величина, поэтому:

$$|\sqrt{3} + 2| = \sqrt{3} + 2$$

Тогда:

$$|\sqrt{3} - 2| + |\sqrt{3} + 2| = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2 = 4$$

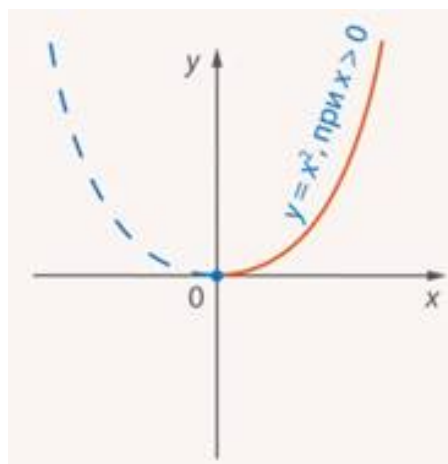
Ответ: $\underline{4}$.

Только что мы сравнили значения двух величин: $\sqrt{3}$ и 2 . Это сделать легко, ведь мы знаем, что $\sqrt{3}$ лежит в промежутке от 1 до 2 . Вспомните: $1^2 = 1 < 3$; $2^2 = 4 > 3$. Значит, значение $\sqrt{3}$ лежит в промежутке от 1 до 2 .

Задание 3. Сравнить значения выражений $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ и $3 + \sqrt{7}$.

Решение.

В подобных случаях будет пользоваться тем, что функция $y = x^2$ монотонно возрастает при положительных значениях x .



Чем нам это поможет? Следующим: для $a > 0$ и $b > 0$, если $a > b$, то $a^2 > b^2$; для $a > 0$ и $b > 0$, если $a^2 > b^2$, то $a > b$. Это означает, что положительные числа $a = \sqrt{6} + \sqrt{10}$ и $b = 3 + \sqrt{7}$ мы можем возвести в квадрат и сравнить:

$$a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{10})^2 = 6 + 2\sqrt{60} + 10 = 16 + 2\sqrt{60}$$

$$b^2 = (3 + \sqrt{7})^2 = 9 + 6\sqrt{7} + 7 = 16 + 6\sqrt{7}$$

Осталось сравнить числа $2\sqrt{60}$ и $6\sqrt{7}$. Сделаем это аналогичным образом, возведя их в квадрат:

$$(2\sqrt{60})^2 = 240$$

$$(6\sqrt{7})^2 = 252$$

Так как $252 > 240$, то $6\sqrt{7} > 2\sqrt{60}$, тогда $16 + 6\sqrt{7} > 16 + 2\sqrt{60}$.

Мы выяснили, что $b^2 > a^2$, значит, $b > a$ (для $a > 0$ и $b > 0$). В итоге:
 $3 + \sqrt{7} > \sqrt{6} + \sqrt{10}$

Ответ: $3 + \sqrt{7} > \sqrt{6} + \sqrt{10}$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Упростить выражение:

$$\left(\frac{x}{4x+16} - \frac{x^2+16}{4x^2-64} - \frac{4}{x^2-4x} \right) \cdot \frac{3x^2-24x+48}{x+4}$$

2. Упростить выражение:

$$\frac{xy^{-6}}{(7z)^5} \div \left(\frac{x^{-3}}{49zy^2} \right)^3$$

3. Сравнить значения выражений:

$$\frac{1}{3\sqrt{3}-5} + \frac{1}{3\sqrt{3}+5}; \sqrt{30}$$

Список литературы

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. Для общеобразоват. Организаций: базовый и углублённый уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2022 г. – 464 с.
2. Алгебра и начала анализа: учебник для 10 – 11 кл. общеобразовательных учреждений./ Под ред. А.Н. Колмогорова. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2018 г.